Exercice 3 **6 points**

Partie A

1. Pour $x \geqslant 2$: $3x-2 \geqslant 4 > 0$ donc f est bien définie et dérivable.

   $\forall x \in [2\,;\,+\infty[,\quad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

   f' est à valeurs strictement positives sur $[2\,;\,+\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

   On a : $f(2) = \sqrt{3\times 2-2} = \sqrt{4} = 2$

   Et : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3x+2 = +\infty$,

   donc, par composition (avec $y = 3x+2$) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x-2} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

2. **a.** *Initialisation :* Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \geqslant 2$.

   de plus : $u_1 = f(6) = \sqrt{3\times 6-2} = \sqrt{16} = 4 \geqslant 2$.

   Donc on a bien : $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Supposons que, pour un entier n naturel donné, l'inégalité est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

   Montrons que l'inégalité suivante est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

   Par hypothèse de récurrence : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

   Comme f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$: $f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6)$

   D'après la relation de récurrence de (u_n) : $\sqrt{3\times 2-2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3\times 6-2}$.

   En effectuant les calculs : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   Enfin, comme $4 \leqslant 6$, ce qui précède implique : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

   Si l'inégalité est vraie pour un entier naturel n donné, alors on prouve qu'elle est aussi vraie pour l'indice suivant, $n+1$.

   Conclusion : L'inégalité est vraie pour l'indice $n = 0$, et pour tout n entier naturel, elle est héréditaire. Par application du principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout n entier naturel, on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

   b. De la question précédente on tire :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 2;

(u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $2 \leqslant \ell$.

3. Soit x un réel supérieur à 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{3x-2} = x \\ &\iff 3x - 2 = x^2 \quad \text{car } x \geqslant 2 \text{ donc } 3x-2 \geqslant 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré a donc deux racines 1 et 2.

Comme ℓ vérifie $\ell \geqslant 2$, seule la racine 2 peut être égale à ℓ.

On a donc $\ell = 2$.

4. **a.** La suite (u_n) converge vers 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Un intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]b\,;\,a[$, avec $a > 2$, ou a qui est $+\infty$. Donc pour tout $a > 2$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n < a$.

La boucle `while` se termine donc après N_0 itérations, et `rang`(2.000001) renvoie la valeur N_0.

Le seul risque que l'algorithme ne se termine pas avec un $a > 2$ serait que le réel a soit trop proche de 2, et que les algorithmes utilisés par python donnent une valeur approchée trop peu précise des différents termes u_n pour que la boucle se termine.

b. D'après ce que l'on a expliqué précédemment, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si $a > \ell = 2$.

Donc pour $a > 2$.

Partie B

1. On a : $v_1 = 3 - \dfrac{2}{v_0} = 3 - \dfrac{2}{6} = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Déterminons la relation de récurrence de la suite (w_n).

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1}-1}{v_{n+1}-2} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{\frac{2v_n - 2}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} \\ &= \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} \\ &= \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

Au vu de sa relation de récurrence, (w_n) est géométrique de raison 2.

Son premier terme est : $w_0 = \dfrac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \dfrac{6-1}{6-2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

b. Puisque (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 1,25$ et de raison $q = 2$, par propriété, on en déduit que, pour tout entier n naturel, on a : $w_n = 1,25 \times 2^n$.

On admet la relation $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$.

Avec un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, la suite (w_n) est strictement croissante, et donc elle est minorée par son premier terme : 1,25. Le nombre $w_n - 1$ sera donc toujours non nul.

Donc en inversant la relation admise, on a : $v_n - 2 = \dfrac{1}{w_n - 1} = \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

Ce qui implique : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

c. Comme $w_0 = 1,25 > 0$ et $q = 2 > 1$, par propriété : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,25 \times 2^n = +\infty$.

Par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,25 \times 2^n - 1 = +\infty$.

Puis, par limite de l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} = 0$.

Finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

3. Résolvons : $v_n < 2,01$:

$$\begin{aligned}
v_n < 2,01 &\iff 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 2,01\\
&\iff \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 0,01\\
&\iff 1 < 0,01(1,25 \times 2^n - 1) \quad \text{car, pour tout } n \text{ naturel, on a : } \quad 1,25 \times 2^n - 1 > 0\\
&\iff 1 < 0,0125 \times 2^n - 0,01\\
&\iff 1,01 < 0,0125 \times 2^n\\
&\iff \frac{1,01}{0,0125} < 2^n \quad \text{car } 0,0125 > 0\\
&\iff 80,8 < 2^n\\
&\iff \ln(80,8) < n\ln(2) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} < n \quad \text{car } \ln(2) > 0\\
&\iff n > \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(80,8)}{\ln(2)} \approx 6,34$. Le plus petit entier n vérifiant $v_n < 2,01$ est donc $n = 7$.

Partie C

Comme on a démontré dans la **partie A** que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, on explore les premiers termes de la suite à la calculatrice. On constate que $u_{16} \approx 2,012 \geqslant 2,01$, alors que $u_{17} \approx 2,009 < 2,01$.

On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 17 : $1,99 < 2 < u_n \leqslant u_{17} < 2,01$

et donc, en particulier : $n \geqslant 17 \implies u_n \in]1,99\,;\,2,01[$.

D'après la **partie B**, on a pour tout n entier naturel :

$1,25 \times 2^n \geqslant 1,25$, donc $1,25 \times 2^n - 1 \geqslant 0,25 > 0$, on en déduit : $\dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 0$.

Finalement, on a : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 2$.

D'après la dernière question de la **partie B**, on a : $n \geqslant 7 \Longrightarrow v_n < 2,01$.

Ainsi, on a : $n \geqslant 7 \Longrightarrow 1,99 < 2 < v_n < 2,01$.

Donc les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle à partir de l'indice 7.

Pour que les deux conditions soient réunies, il faut donc que l'indice soit simultanément supérieur à 7 et à 17, donc, en conclusion, c'est à partir de l'indice $N = 17$ que les termes v_n et u_n sont dans l'intervalle $]1,99 ; 2,01[$.